

《数学大观》

十一、《九章算术》的及其 刘徽注中的几何成就

主讲人：青课



中国古代的几何主要用于解决实际问题

《九章算术》总结了生产、生活实践中大量的几何知识，在方田、商功和勾股章中提出了很多面积、体积的计算公式和勾股定理的应用。



中国古代的几何主要用于解决实际问题

刘徽在对《九章算术》作注时进行了重要的改进和创新，形成中国特有的几何学成就和解决几何问题的方法。



01

多边形面积计算

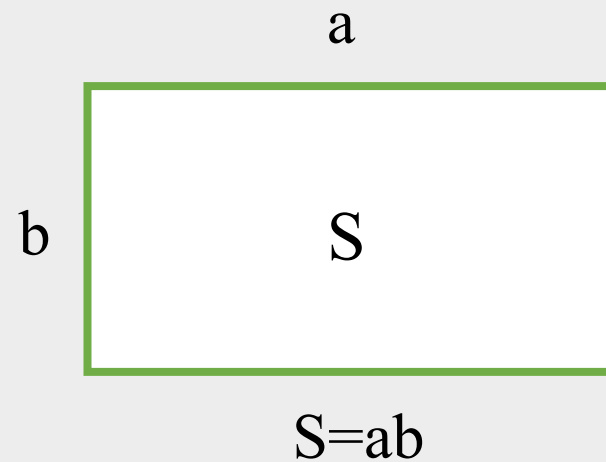


《九章算术》方田章主要论述平面图形直线形和圆的面积计算方法：

(1) 长方形面积：长方形在古代称为“方田”或“直田”。给出面积公式 $S=ab$ 和计算方法。

刘徽用“幂”作为面积的定义：“凡广从相乘谓之幂”。

幂的涵义与今天指的乘方不同



(2) 三角形面积：三角形在古代称为“圭田”。《九章算术》给出面积公式为“半广以乘正从” ($S = \frac{1}{2} ah$)

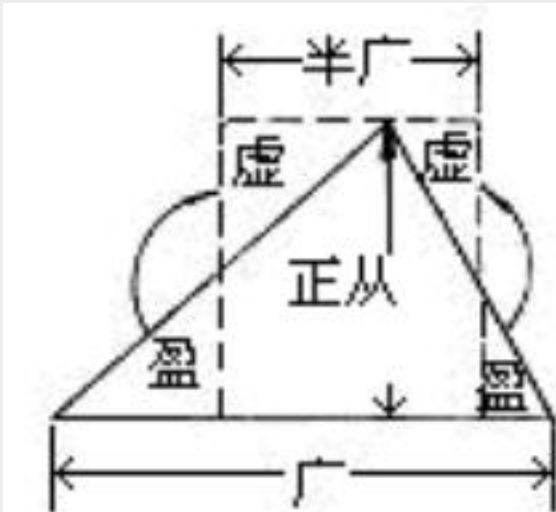
三角形的底边a

底边上的高h





刘徽在注文中对这一计算公式实质上作了证明：“**半广者，以盈补虚，为直田也**” “**亦可以半正从以乘广**”。



(1) 半广以盈补虚

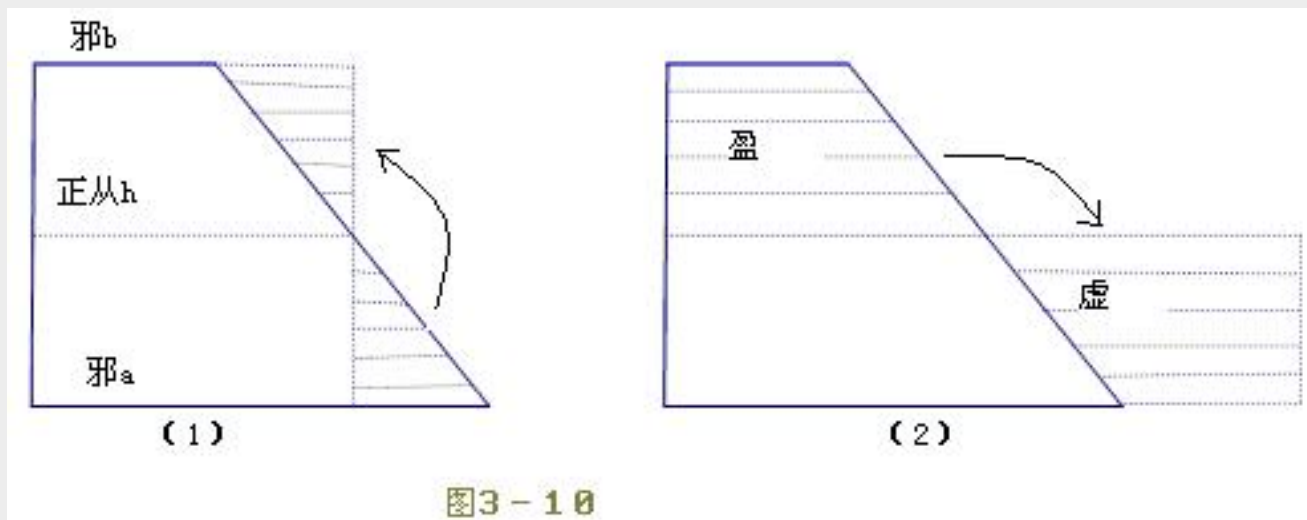


(2) 半正从以乘广

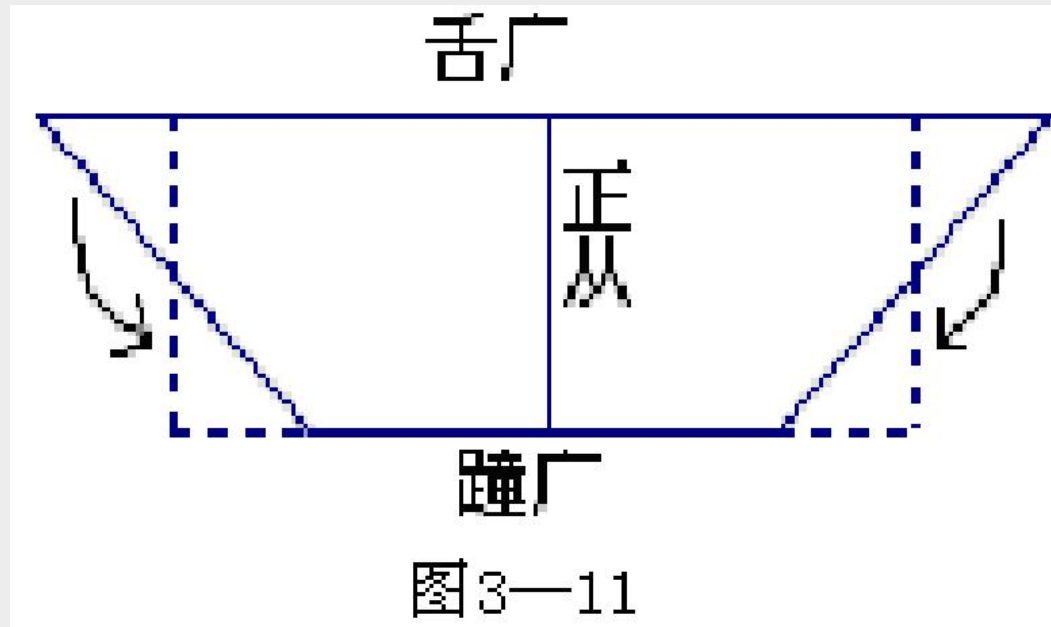


(3) 梯形面积。直角梯形称为“邪田”（即斜田）。方田章第27，28题：“术曰：并两邪而半之，以乘正从……，又可半正从……以乘并。”面积公式为： $S = \frac{1}{2} (a+b) h$ 。

刘徽在注中说明他的证法仍是出入相补法。



《九章算术》把一般梯形称为“**箕田**”（方田章第29、30题），上、下底分别称为“**舌**”、“**踵**”，面积公式是：“术曰：并踵舌而半之，以乘正从。”公式同上一致。



02

圆与曲边形的面积计算

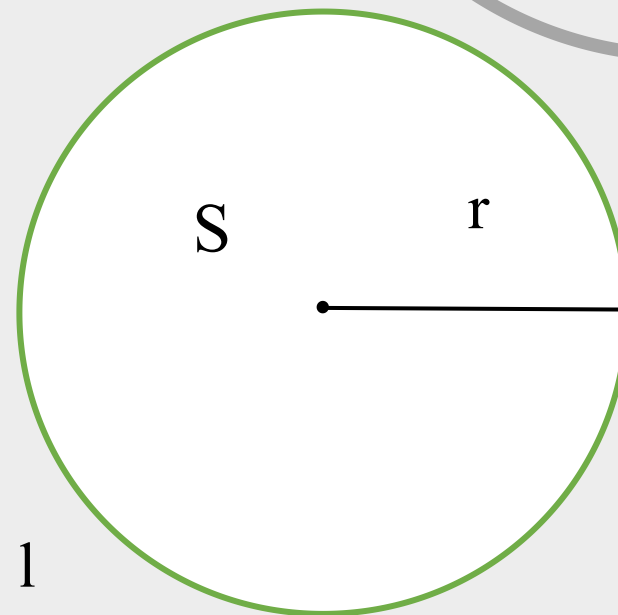


(1) 圆面积。《九章算术》提出圆面积计算方法为：“半周半径相乘得积步”（方田章第31、32题），公式为： $S = \frac{1}{2} l r$ 。

(2) 弓形面积。弓形田在古代称为“弧田”。

(3) 圆环面积。古代称圆环的田为“环田”

(4) 宛田面积。古代的宛田实指球冠形的田地。



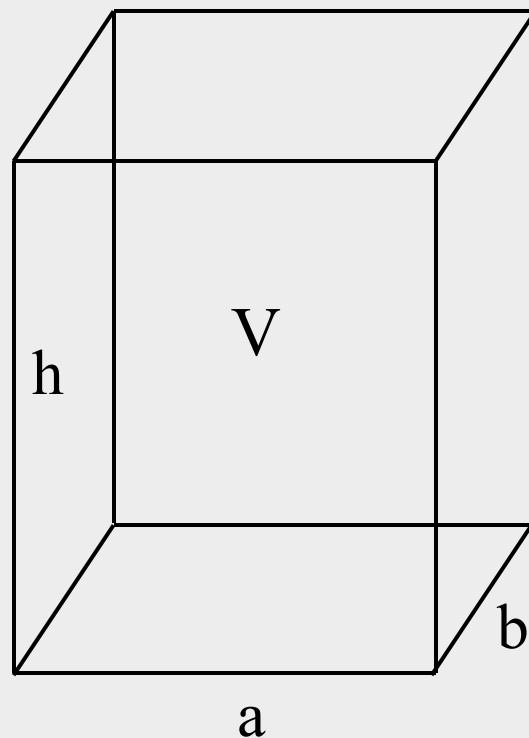
03

多面体、球与曲面体的
体积的体积计算



《九章算术》给出了长方体或正方体体积计算公式： $V=abh$ 。在此基础上来计算其他立体图形体积。

如：（1）直棱柱 （2）棱锥、棱台。



商功章还有圆柱、圆锥、圆台
(古代称“圆亭”)，球(我国古代把
球称为“立圆”，又叫做“丸)与曲面
体的体积的计算公式等，但由于当时取
 $\pi=3$ ，所以计算结果并不准确。



04

勾股定理及其应用



《九章算术》勾股章共24题，除了勾股定理及其变形的三个题以及涉及“勾股容方”、“勾股容圆”各1题以外，其余19个题全是应用问题。



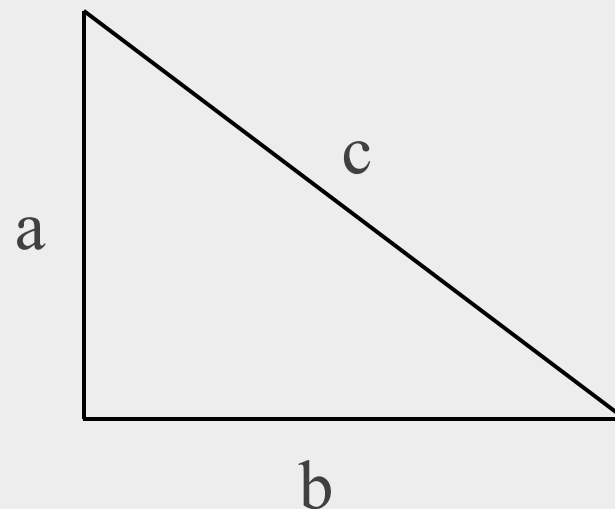


《九章算术》还以率的形式表示出勾股形三边的关系：

设勾为a，股为b，弦为c，则：

$$b : a : c = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2) \quad [\text{此处}(c+b) : a = m : n, m, n \text{互素}]$$

世界数学史上第一次提出
完整的勾股数组通解公式



感谢聆听

